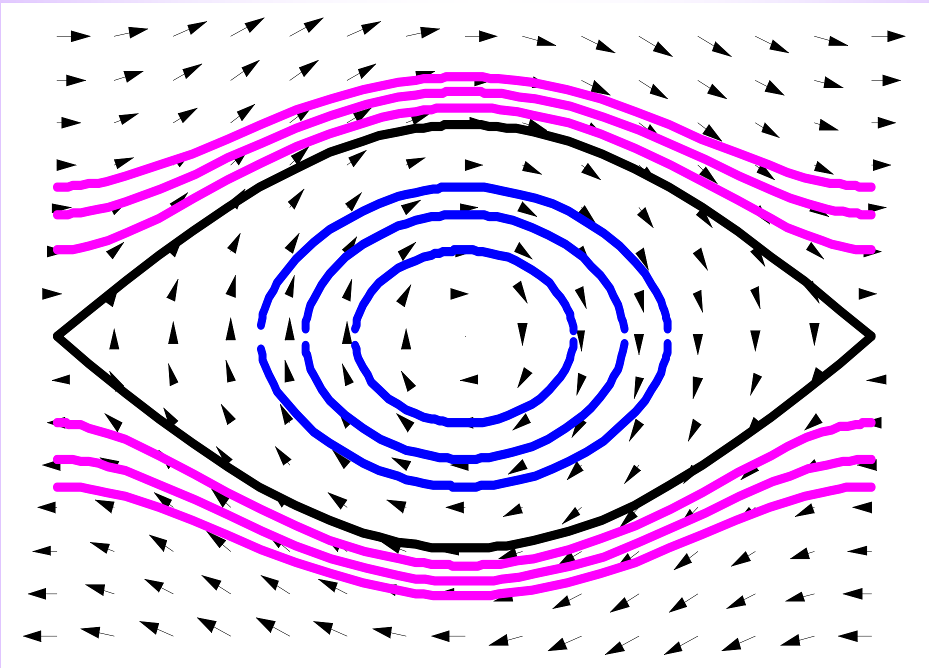
СТЕПАН ТЕРЗИЯН

ЮЛИЯ ЧАПАРОВА

ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Въведение с използване на *Mathematica*



РУ "АНГЕЛ КЪНЧЕВ"

РУСЕ, 2005 г.

С. А. Терзиян
Ю. В. Чапарова

Обикновени диференциални уравнения

Въведение с използване на *Mathematica*

Настоящата книга е предназначена за студенти и докторанти по специалности “Математика и информатика” и “Информатика”. Тя може да се използва и от специалисти по математически, природни и инженерни науки. Изложени са основни понятия, твърдения и методи за решаване и анализиране на обикновени диференциални уравнения. Предполагат се основни знания по математичен анализ и линейна алгебра. Изложението е илюстрирано с много примери и графики, начертани с програмната система *Mathematica.*

УВОД

Настоящият курс е въведение в теорията на обикновените диференциални уравнения (ОДУ). Същият е предназначен за студенти и докторанти по специалности “Математика и информатика” и “Информатика”, но изложението може да се ползва и от специалисти по математически, природни и инженерни науки.

Целта на курса е да се дадат основни понятия и теореми от теорията на обикновените диференциални уравнения и техни приложения към различни моделни диференциални уравнения, които възникват в естествените науки. Предполагат се основни знания от математичния анализ на функции на една и много променливи и линейната алгебра. Подборът на материала, включен в тази книга, е повлиян от добре известни учебници, сборници със задачи и монографии, като [1,2,3,4,5,6,7,8,10,12].

Книгата се състои от шест глави.

В първа глава се разглеждат някои класове диференциални уравнения от първи ред, които се решават в явен вид, като уравнения с разделени променливи и свеждащи се към тях, тотални уравнения и интегриращи множители.

Във втора глава се разглеждат теореми за съществуване и единственост на решения на задача на Коши за ОДУ от първи ред в нормална форма.

В трета глава се разглеждат хомогенни и нехомогенни линейни диференциални уравнения (ЛДУ) от висок ред, общи методи за решаване на ЛДУ с постоянни коефициенти в явен вид, а също решаване на някои класове уравнения с променливи коефициенти.

В четвърта глава се разглеждат линейни системи диференциални уравнения от първи ред. Разгледани са решенията и фазовите портрети на линейни хомогенни системи ДУ в равнината, експонента на матрица, нехомогенни линейни системи.

В пета глава се разглеждат общи понятия за системи диференциални уравнения от първи ред, теореми за съществуване и единственост на задача на Коши за системи ДУ, а така също елементи на качествената теория на диференциалните уравнения. Разгледани са фазовите портрети на консервативни системи в равнината и примери, свързани с линеаризацията на нелинейни системи.

В шеста глава са разгледани актуални въпроси, свързани с ограничените решения на диференциални уравнения от четвърти ред, в които се прилагат методите от предните две глави. Тук изложението следва статията [9] и монографията [13].

Разгледаните теоретични въпроси са илюстрирани с конкретни примери, които са онагледени с графики, начертани с програмната система *Mathematica.* Приведени са и съответните програми, които показват различни команди и подходи в програмирането със системата. В това отношение е следван стила и опита от монографията [14]. Читателят може да види друго изложение на ОДУ с използване на *Mathematica* в [15].

Отделните глави са написани, както следва: проф. Терзиян – първа, втора, трета и шеста; д-р Чапарова – четвърта и пета.

Курсът е изграден въз основа на лекциите по диференциални уравнения, които авторите са изнасяли в Русенски университет и Икономически университет Варна, за студенти и докторанти по специалности “Математика и информатика” и “Информатика”.

Авторите изказват своите благодарности към акад. Петър Попиванов и проф. Недю Попиванов за интереса и полезните обсъждания по време на подготовката на учебника, към колегите доц. Дико Сурожон и гл. ас. Ели Калчева за съдействието и съвместната работа по семинарните упражнения към курса, на инж. Мария Маринова за помощта при текстообработката.

Проф.д.м.н. Степан Терзиян
Д-р Юлия Чапарова

Септември, 2005
Русе

СЪДЪРЖАНИЕ

ГЛАВА 1

Общи понятия за обикновени диференциални уравнения. Решаване на някои класове диференциални уравнения от първи ред

1.1. Въведение

Нека $y = y(x), \quad x \in I = (a,b) \subseteq \mathbf{R}$ е диференцируема функция в интервала I. Обикновено диференциално уравнение (ОДУ) се нарича уравнение от вида

$$F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0\,, \tag{1.1}$$

където $x \in I$ е независима променлива, y е n пъти диференцируема функция, която е неизвестна, а $F(x, y_0, ..., y_n)$ е функция на $n+2$ реални променливи.

Означаваме с $C^n(I)$ съвкупността на функции $y: I \to \mathbf{R}$, за които функциите $y, y', \ldots, y^{(n)}$ са непрекъснати в интервала I. Максималният ред на производна n на неизвестната функция y, която участва в (1.1), се нарича ***ред на диференциалното уравнение*** (1.1).

Решение на (1.1) в интервала I е функция $y \in C^n(I)$, която заместена в (1.1), заедно със своите производни до n- ти ред превръща (1.1) в тъждество спрямо $x \in I$.

ОДУ от първи ред са от вида $F(x, y(x), y'(x)) = 0$. ОДУ от I ред от вида $y'(x) = f(x, y(x))$ се наричат ОДУ от I ред в нормална форма. ОДУ от втори ред са от вида $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$. Ще отбележим, че вторият закон на динамиката на Нютон $ma = F$ се изразява като диференциално уравнение от втори ред $my''(x) = F(x, y(x), y'(x))$, където x е време, $y(x)$ изминат път за време x, $y'(x)$– моментна скорост, а $y''(x)$ - моментно ускорение.

ОДУ описват различни модели в естествените науки и изразяват закони в тези науки, които са връзки между време, състояние, скорости, ускорения и др. за разглежданите процеси.

Ще дадем примерни моделни уравнения, които се срещат в различни области на естествознанието:

1. $y' = ay$	екология, модел на Малтус;
2. $y' = (a - by)y$	екология, логистично уравнение;
3. $y' + p(x)y = 0$	линейно хомогенно ДУ от I ред;
4. $y' + p(x)y = q(x)$	линейно нехомогенно ДУ от I ред, електрични вериги, икономика;
5. $y' = \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$	геометрична оптика, профил на параболично огледало;
6. $y'' + py' + qy = 0$	линейно хомогенно ДУ от втори ред, непринудени трептения;
7. $y'' + py' + qy = A\cos\omega x$	линейно нехомогенно ДУ от втори ред, принудени трептения;
8. $y'' + \sin y = 0$	уравнение на махалото;
9. $y^{IV} + py = 0$	трептения на греди;
10. $y^{IV} - py'' + y - y^3 = 0$	уравнение на Фишер-Комогоров, фазови преходи.

Ще разгледаме класификация на диференциалните уравнения относно понятието линейност. Изображението $y \to F(x, y, \dots y^{(n)}) =: F(y)$ наричаме диференциален оператор. F е ***линеен оператор*** (ЛО), ако

$$F(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1F(y_1) + c_2F(y_2), \forall c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \forall y_1, y_2 \in C^n(I).$$

F е ***нелинеен оператор***, ако не е ЛО. Например операторът $F(y) = y^2$ е нелинеен оператор. Ако F е линеен оператор, то обикновено го означаваме с L. Примери за линейни диференциални оператори (ЛДО) са операторите от вида

$$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y, \tag{1.2}$$

където коефициентите $a_j(x)$, $a_0(x) \neq 0$, са зададени функции.

Уравненията от вида $Ly = 0$ се наричат линейни хомогенни ДУ от n- ти ред (ЛХДУ от n- ти ред). Уравненията от вида $Ly = f$, където f не е тъждествено нулева функция, се наричат линейни нехомогенни ДУ от n- ти ред (ЛНХДУ от n- ти ред). Читателят може непосредствено да установи, че сред уравненията 1 – 10: 1, 3, 6, 9 са ЛХДУ от първи, втори и четвърти ред; 4 и 7 са ЛНХДУ от първи и втори ред; 2, 5, 8 и 10 са нелинейни ДУ.

В настоящия курс се разглеждат хомогенни и нехомогенни ЛДУ от $n-$ти ред. След това разглежданията продължават с линейни системи ДУ, след което се спираме на нелинейни диференциални уравнения и системи.

1.2. ОДУ с разделени променливи

Диференциалното уравнение от вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.3}$$

се нарича ОДУ с разделени променливи. Ако $g(y) \equiv 1$, то уравнението се решава с непосредствено интегриране:

$$y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad y = \int f(x)dx + C.$$

Ако g не е тъждествено 1, разглеждаме два случая:

1. Нека уравнението $g(y) = 0$ има решение $y_0 : g(y_0) = 0$. Тогава $y = y_0$ е решение и на (1.3), тъй като $y' = 0 = g(y_0)f(x)$. Решението $y = y_0$ е ***изолирано решение*** на (1.3).

2. Ако $g(y) \neq 0$, то (1.3) е равносилно на диференциалното равенство

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)dx}{g(y(x))} = \frac{dy(x)}{g(y(x))} = f(x)dx \tag{1.4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Ако $G'(y) = 1/g(y)$ и $F'(x) = f(x)$, то (1.4) може да се запише като

$$G(y) = F(x) + C, \tag{1.5}$$

или

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \tag{1.6}$$

което задава ***общо решение*** на ДУ ***в неявен вид***.

Да припомним:

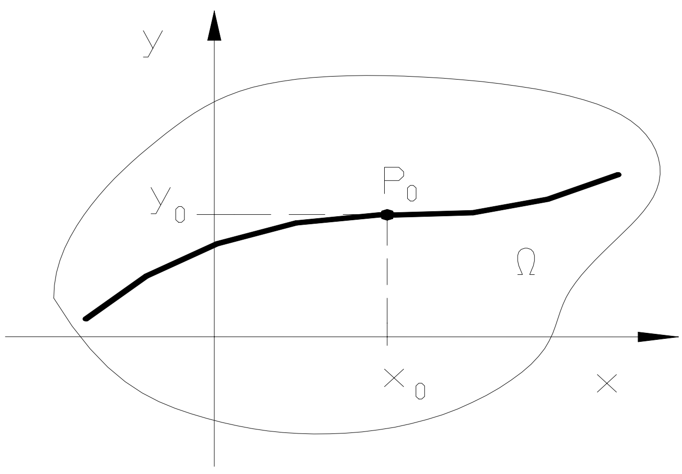
Теорема за обратната функция (ТОФ). *Нека* $y = f(x)$, $x \in I$, *е диференцируема функция и* $f'(x) \neq 0$, $x \in I$. *Тогава съществува обратна функция* $x = f^{-1}(y)$, $y \in R = f(I)$, *която е диференцируема и*

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Съгласно ТОФ G има обратна функция, тъй като $G' = 1/g(y) \neq 0$. Тогава от (1.5) y може да се изрази като функция на x: $y = G^{-1}(F(x) + C)$, което е известно като ***общо решение в явен вид*** на ОДУ с разделени променливи (1.3).

Намирането на решение на диференциалното уравнение $y' = f(x, y)$, което преминава през предварително зададена точка $P_0(x_0, y_0)$ на областта на определение Ω (разширено фазово пространство) на f, се нарича ***задача на Коши***

$$(C): \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$



Фиг.1.1. Разширено фазово пространство и интегрална крива

Решението $y = y(x)$ на задачата на Коши (C) се нарича ***интегрална крива, траектория*** или ***частно решение*** през точката $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$. Клас от решения на уравнението $y' = f(x,y)$, които зависят от една константа C, и са от вида $y = y(x,C)$ или $\Phi(x,y,C) = 0$ или $\varphi(x,y) = C$, се нарича ***общо решение*** на уравнението. Решение на уравнението, което не се включва в класа на общото решение се нарича ***изолирано решение.*** Решение на уравнението, за което се нарушава единствеността на задачата на Коши за всяка начална точка $(x, y(x))$ се нарича ***особено решение***. Особените решения могат да бъдат обвивка на фамилията криви $\Phi(x,y,C) = 0$ от общото решение. Тогава те се съдържат сред дискриминантните криви, зададени с уравненията

$$\left|\begin{array}{l} \Phi(x,y,C) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial C}\Phi(x,y,C) = 0. \end{array}\right.$$

За по-подробно разглеждане на особените решения на диференциални уравнения насочваме читателя към учебника на Попиванов и Китанов [7], Лекция 3.

В случая на ОДУ с разделени променливи, намирането на решение, за което $y(x_0) = y_0$, се свежда до намиране на константа C, за която $G(y_0) = F(x_0) + C$, откъдето $G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$, което съгласно основната теорема на Лайбниц – Нютон на интегралното смятане е равносилно на

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt .$$

Пример 1.1. *Намерете общото решение на ОДУ* $y' = \dfrac{y^2 + y}{x - x^2}$.

Решение. Решенията са определени за $x \neq 0$, $x \neq 1$. Изолираните решения са решения на уравнението $y^2 + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, y = -1$. Общото решение е определено за $y^2 + y \neq 0$ и след разделяне на променливите

$$\frac{dy}{y^2 + y} = \frac{dx}{x - x^2}$$

и разлагане на прости дроби

$$\frac{1}{x-x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}, \qquad \frac{1}{y^2+y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}$$

получаваме последователно

$$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\ln C\,,$$

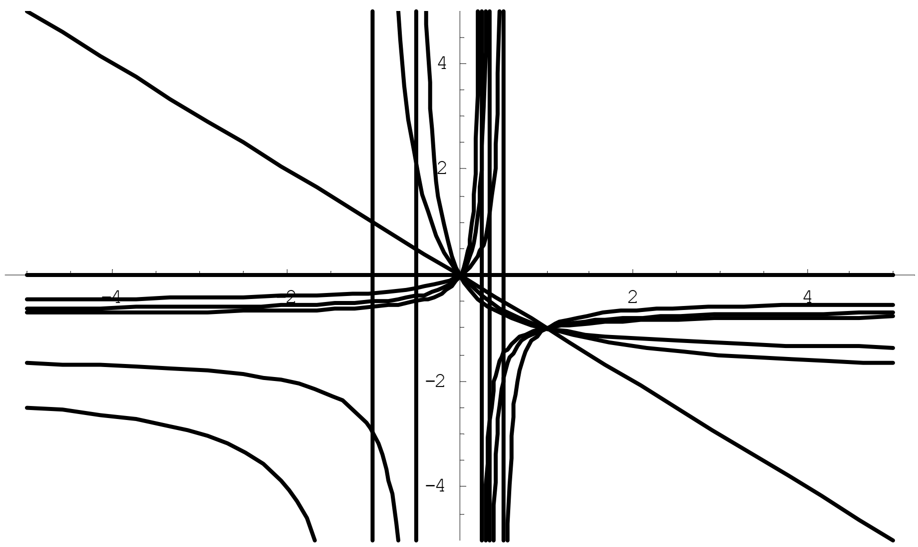
$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|C \quad\Rightarrow\quad \frac{y(x-1)}{x(y+1)}=C\,,$$

$$y=\frac{Cx}{x(1-C)-1}, \quad x\neq\frac{1}{1-C}\ . \tag{1.7}$$

На Фиг.1.2 са представени графиките на функциите (1.7) при $C=-3,-2,-1,0,1,2,3$, които са начертани със следната програма на система *Mathematica:*

f [C_, x_] $= \dfrac{Cx}{x\,(1-C)-1}$

Do [g [i_] = Plot [f [– 4 + i, x], { x,– 5,5 }, PlotRange → { – 5,5 },
PlotStyle → Thickness [0.006]], { i,1,7 }]
Show [g[1], g[2], g[3], g[4], g[5], g[6], g [7]]



Фиг.1.2. Графики на $y=\dfrac{Cx}{x(1-C)-1}$ при $C=-3,-2,-1,0,1,2,3$.

Пример 1.2. *Намерете решението на задачата на Коши*

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$$

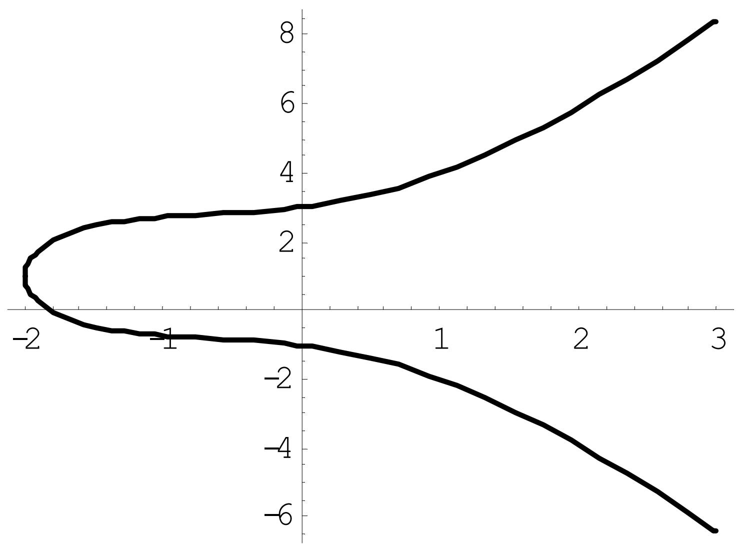
и интервала на съществуване на решението.

Решение. Общото решение се получава чрез разделяне на променливите и неопределено интегриране:

$$2\int (y-1)dy = \int (3x^2 + 4x + 2)dx + C \Leftrightarrow (y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + C.$$

Частното решение се получава при заместване на $x = 0, y = -1$ в последното уравнение, откъдето $(-1-1)^2 = 0 + C \;\Rightarrow\; C = 4$ и търсеното решение е $(y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ или $y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$. То е определено за $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \geq 0$ или $\left(x^2 + 2\right)(x+2) \geq 0 \Rightarrow \quad x \geq -2$. Решението е изобразено на Фиг. 1.3 с програмата

f1 = Plot[1 + $\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$*, {x,–2,3}, PlotStyle → Thickness[0.006]]*
f2 = Plot[1 – $\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$*, {x,–2,3}, PlotStyle → Thickness[0.006]]*
Show[f1, f2]



Фиг.1.3. Графика на $(y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$.

1.3. Линейни ОДУ от I ред. Бернулиеви уравнения

Линейни ОДУ от I ред са диференциални уравнения от вида

$$y' + p(x)y = 0\,, \tag{1.8}$$

$$y' + p(x)y = q(x)\,. \tag{1.9}$$

Съществуват точни формули за общите решения на тези уравнения, които ще изведем. Преди това ще докажем една лема, която се използува често неявно при решаването на диференциални уравнения, при които възникват логаритми.

Лема 1.1. *Ако* $y = f(x)$ *е непрекъсната функция в интервала* $[a,b]$ *и* $\left|f(x)\right| = C$, $\forall x \in [a,b]$, *то* f *е константа, т.е.* $f(x) = C$, $\forall x \in [a,b]$ *или* $f(x) = -C$, $\forall x \in [a,b]$.

Доказателство. Разглеждаме два случая:

1. $C = 0$, т.е. $\left|y(x)\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

2. $C \neq 0$, $C > 0$ $\Rightarrow y(x) = C$, $\forall x \in [a,b]$ или $y(x) = -C$, $\forall x \in [a,b]$. Ако допуснем противното, съществуват $x_1, x_2 \in [a,b]$, такива че $f(x_1) = C$, $f(x_2) = -C$, $x_1 \neq x_2$. Съгласно теоремата за междинните стойности на непрекъснати функции следва, че съществува $x_0 \in [a,b]$, такова че $y(x_0) = 0$ - противоречие. ■

1. Общо решение на (1.8). Уравнението е с разделени променливи и се свежда до

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C_1, \quad y \neq 0 \;\Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C_1\,, \quad |y| = Ce^{-\int p(x)dx}\,, \quad C = e^{C_1}\,.$$

Съгласно Лема 1.1

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

което е общо решение на (1.8).

2. Общо решение на (1.9). Метод на Лагранж. Търсим решение на (1.9) от вида

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}\,.$$

Тогава

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)).$$

Като заместим в (1.9) получаваме

$$y' + py = C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \quad \Rightarrow$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C\,.$$

Така общото решение на (1.9) се задава с формулата

$$y = e^{-\int p(x)dx}(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx)$$

Уравнения, които се свеждат до линейните ДУ от първи ред (1.9), са т.н. уравнения на Бернули (Йохан I Бернули, 1667 – 1748), които са възникнали при задачи от хидродинамиката. Те са от вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n\,, \quad n \neq 1 \tag{1.10}$$

Общото решение при $y \neq 0$ се получава при деление (1.10) на y^n и свеждане до линейното уравнение

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)\,.$$

Полагаме $z(x) = 1/y^{n-1}(x) = y^{1-n}(x)$. Тогава

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)\frac{y'}{y^n} \Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}\,.$$

Уравнение (1.10) се преобразува в

$$\frac{z'}{1-n} + pz = q \quad \Leftrightarrow \quad z' + (1-n)pz = (1-n)q\,,$$

което е линейно ОДУ. Тогава

$$z = e^{-(1-n)\int pdx}\left(C + (1-n)\int qe^{(1-n)\int pdx}dx\right),$$

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} = e^{-\int pdx}\left(C + (1-n)\int qe^{(1-n)\int pdx}dx\right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

Пример 1.3. *Намерете общото решение на логистичното уравнение*

$$y' = (a - by)y, \qquad (1.11)$$

при $a > 0, \quad b > 0$ *и покажете, че* $y(x) \to a/b$ *при* $x \to +\infty$*.*

Решение. Уравнението (1.11) е Бернулиево. Разделяме го на y^2 и полагаме $z = 1/y \quad \Rightarrow \quad z' = -y'/y^2$. Тогава

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{a}{y} = -b \quad \Leftrightarrow \quad -z' - az = -b \quad \Leftrightarrow$$

$$z' + az = b \quad \Rightarrow \quad z = e^{-\int adx}\left(C + \int be^{\int adx}dx\right)$$

$$\Rightarrow z = e^{-ax}\left(C + \frac{b}{a}e^{ax}\right) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a},$$

откъдето $y = 1/(Ce^{-ax} + b/a)$. При $x \to +\infty$, $e^{-ax} \to 0$ и следователно $y(x) \to a/b$. Да отбележим, че при $C > 0$ решенията са определени за всички $x \in \mathbf{R}$ и тогава $0 < y < a/b$. При $C < 0$, решенията са определени за $x > (1/a)\ln(ca/b)$, $C = -c < 0$ и следователно $y > a/b$. От $y' = (a - by)y = -by(y - a/b)$ следва, че при $0 < y < a/b$ $y' > 0$ и функцията y е растяща, а при $y > a/b$ $y' < 0$, значи y е намаляваща. Освен това

$$y'' = -by'y + (a - by)y' = y'(a - 2by) = y(a - by)(a - 2by),$$

$$y'' = 2b^2 y\left(y - \frac{a}{b}\right)\left(y - \frac{a}{2b}\right),$$

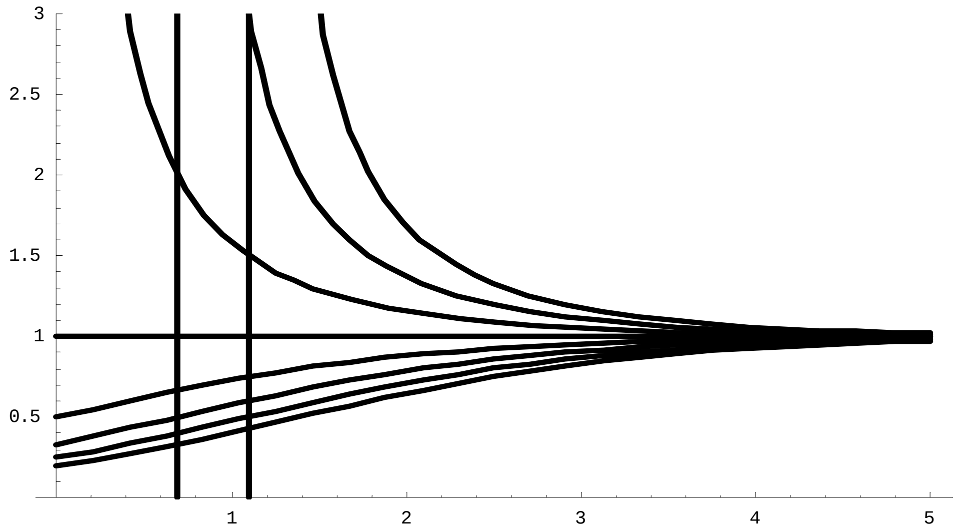
откъдето

$$y'' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < y < \frac{a}{2b} \quad \textit{или} \quad y > \frac{a}{b} \qquad \textit{и} \qquad y'' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2b} < y < \frac{a}{b}.$$

Така при $0 < y < a/(2b)$ *или* $y > a/b$ функциите y са изпъкнали, а при $a/(2b) < y < a/b$ те са вдлъбнати. Числото $a/(2b)$ е ниво на инфлексия за всички траектории, за които $0 < y < a/b$. Накрая, на Фиг. 1.4 са изобразени траекториите при $a = b = 1$ и $C = -3, -2, ..., 4$ със следната програма на *Mathematica:*

$$f[\ C\_, x\_\ ] = \frac{1}{C\ Exp[-x] + 1}$$

Do[g[i] = Plot[f[–4 + i, x], {x,0,5}, PlotRange → {0,3},
PlotStyle → Thickness[0.007]], {i,1,8}]
Show[g[1], g[2], g[3], g[4], g[5], g[6], g[7], g[8]]



Фиг.1.4. Траектории на уравнението $y' = (a - by)y$, $y > 0$, $x > 0$.

1.4. Хомогенни диференциални уравнения и приводими към тях

Един от класовете ДУ, които се свеждат до ДУ с разделени променливи, са т.н. хомогенни ДУ

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0. \tag{1.12}$$

Функцията на две променливи $f(x, y)$ се нарича ***хомогенна от степен*** n , ако $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Функция от вида $f(y/x)$ е хомогенна от степен 0. Уравнението (1.12) се свежда до уравнение с разделени променливи с въвеждане на функцията

$$z(x)=\frac{y(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x)=xz(x) \quad \Rightarrow y'(x)=z(x)+xz'(x).$$

Така уравнение (1.12) се преобразува в ДУ с разделени променливи относно функцията z: $z(x)+xz'(x)=f(z(x))$, или накратко

$$z+x\frac{dz}{dx}=f(z) \;\Leftrightarrow\; x\frac{dz}{dx}=f(z)-z.$$

1. Ако уравнението $f(z)-z=0$ има решение $z=z_0$, то $y=z_0x$ е изолирано решение на (1.12).

2. Ако $z-f(z)\neq 0$, след разделяне на променливите получаваме

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dz}{f(z)-z}=\ln|x|+C_1=\ln C|x|, \quad C_1=\ln C.$$

Нека $F(z)=\int(1/(f(z)-z))dz$, тогава $F'(z)=1/(f(z)-z)\neq 0$ откъдето съгласно ТОФ, F^{-1} съществува и $z=F^{-1}(\ln(Cx)) \quad \Rightarrow \quad y=xF^{-1}(\ln(Cx))$ е общо решение на уравнение (1.12).

Сега ще разгледаме по-общи класове ДУ, които са приводими към хомогенни ДУ. Такива са уравненията

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right). \tag{1.13}$$

Ако $c_1=c_2=0$, то уравнението (1.13) е хомогенно. Ако $(c_1,c_2)\neq(0{,}0)$, с подходяща смяна на променливи, уравнението (1.13) се свежда до хомогенно. За целта се разглежда линейната система

$$\left|\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{array}\right. \tag{1.14}$$

Случай 1. $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$. Системата (1.14) има единствено решение

$$x_0=\frac{1}{\Delta}(c_2b_1-c_1b_2), \quad y_0=\frac{1}{\Delta}(c_1a_2-c_2a_1).$$

Правим смяна на променливи

$$\left| \begin{array}{l} x = \xi + x_0 \\ y = \eta + y_0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \end{array} \right. .$$

Тогава за функцията $\eta = y - y_0 = y(\xi + x_0) - y_0 = \eta(\xi)$ имаме

$$\eta'(\xi) = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = y'(x).1 = y'(x).$$

За дясната страна получаваме

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1\xi + b_1\eta + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2\xi + b_2\eta + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}$$

$$= \frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta} = \frac{a_1 + b_1\eta / \xi}{a_2 + b_2\eta / \xi}.$$

Така, в новите променливи (ξ, η) уравнението (1.13) се преобразува в

$$\eta'(\xi) = f\left(\frac{a_1 + b_1\eta / \xi}{a_2 + b_2\eta / \xi} \right) = F\left(\frac{\eta}{\xi} \right),$$

което е хомогенно ДУ.

Случай 2. $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \neq 0 : a_2 = \lambda a_1, \, b_2 = \lambda b_1.$

Имаме

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right) = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2} \right) = g(a_1x + b_1y).$$

Нека $b_1 \neq 0$. Полагаме $z = a_1x + b_1y \quad \Rightarrow \quad y' = (z' - a_1) / b_1$. Тогава уравнение (1.13) се преобразува в $z' = b_1 g(z) + a_1$, което е уравнение с разделени променливи.

Ако $b_1 = 0$, то уравнение (1.13) е от вида $y'(x) = g(a_1x)$, откъдето $y(x) = \int g(a_1x)dx + C$.

Пример 1.4. *Намерете общото решение на ДУ*

$$y' = \frac{x-2y+5}{y-2x-4}. \qquad (1.15)$$

Решение. Системата

$$\left| \begin{array}{l} x-2y+5=0 \\ y-2x-4=0 \end{array} \right.$$

има единствено решение $x_0 = -1,\quad y_0 = 2$. Правим смяна на променливи

$$\left| \begin{array}{l} x = \xi - 1 \\ y = \eta + 2 \end{array} \right. .$$

Уравнението (1.15) се преобразува в

$$\eta'(\xi) = \frac{\xi - 2\eta}{\eta - 2\xi} = \frac{1-2\eta/\xi}{\eta/\xi - 2}.$$

Полагаме $z = \eta/\xi \;\Rightarrow \eta = z\xi \Rightarrow\; \eta' = z + \xi z'$. Тогава

$$z + \xi z' = \frac{1-2z}{z-2} \;\Leftrightarrow\; \frac{z-2}{1-z^2}dz = \frac{d\xi}{\xi} \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{\xi}{C^{1/2}} = \ln\left(\frac{z-1}{(z+1)^3}\right)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{(x+1)^2}{C} = \frac{\dfrac{y-2}{x+1}-1}{\left(\dfrac{y-2}{x+1}+1\right)^3} = \frac{\dfrac{y-x-3}{(x+1)}}{\dfrac{(y+x-1)^3}{(x+1)^3}} \quad\Leftrightarrow$$

$$(y+x-1)^3 = C(y-x-3).$$

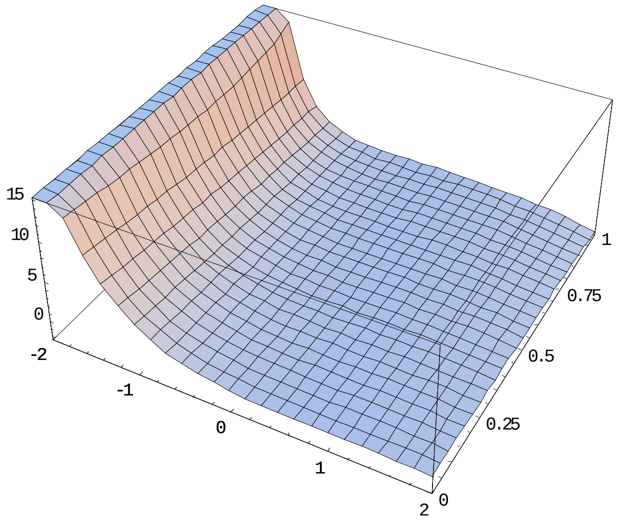
Решенията се представят като линии на ниво на функцията $z = \dfrac{(y+x-1)^3}{y-x-3}$ при $y - x \neq 3$.

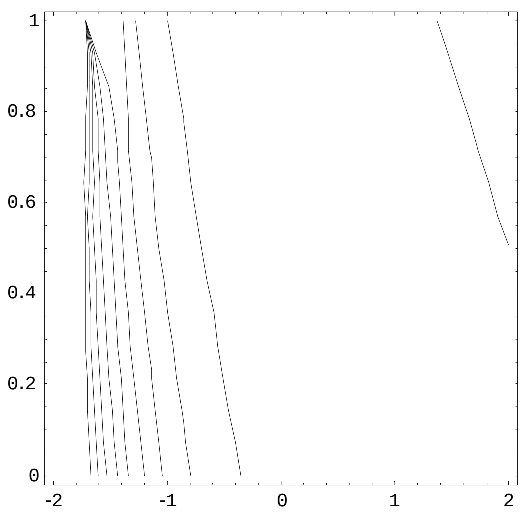
На фиг.1.5 са дадени графиката на тази функция и линиите й на ниво за $y - x \neq 3$ с програмата на *Mathematica*:

$$f[\ x\_, y\_\ ] = \frac{(y + x - 1)^3}{y - x - 3}$$

$$Plot3D[\ f[x, y], \{x, -2, 2\}, \{y, 0, 1\}\ ]$$

$$ContourPlot[\ f[x, y], \{x, -2, 2\}, \{y, 0, 1\}, ContourShading \to False\ ]$$





Фиг.1.5. Графика и линии на ниво на $z = \frac{(y + x - 1)^3}{y - x - 3}$,

$(x, y) \in [-2,2] \times [0,1]$.

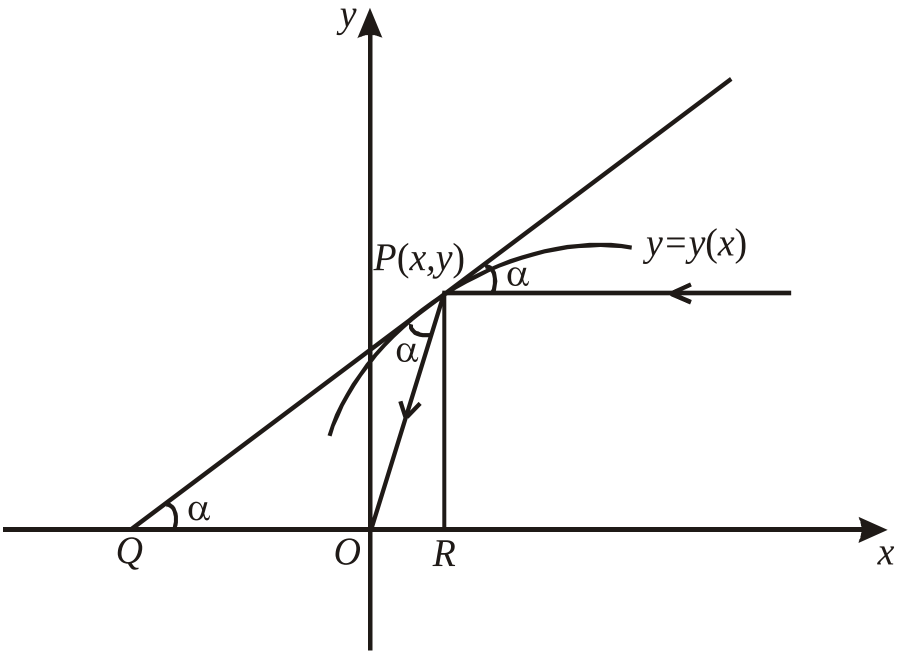
Пример 1.5. *Изведете ДУ на параболичното огледало и намерете общото му решение*:

а) Намерете функции $y = y(x)$*, за които сноп лъчи успоредни на оста* Ox*, след отразяване от графиката на функцията (профила на огледалото) се събира във фокуса* $O(0,0)$*. Покажете, че*

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

б) Намерете общото решение на полученото ДУ.

Решение. (а) Нека $P(x, y)$ е точка от огледалото, $R(x,0)$ е проекцията й върху оста Ox, Q е пресечната точка на допирателната през P и оста Ox. Съгласно закона за отражение $|QO| = |PO| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (вж. Фиг.1.6). Тогава от правоъгълния триъгълник QRP имаме



Фиг.1.6. Параболично огледало.

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y/x}{1 + \sqrt{1 + (y/x)^2}}.$$

(b) Полученото уравнение е хомогенно. След смяната $z = y/x$, то се преобразува в

$$\left(-\frac{1}{z\sqrt{1+z^2}} - \frac{1}{z} \right) dz = \frac{dx}{x},$$

откъдето при $y > 0$ получаваме

$$\ln\left(\frac{1}{z} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} \right) = \ln Czx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} = Czx,$$

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = Cy^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = Cy^2 - x,$$

$$y^2 = C^2 y^4 - 2Cxy^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = C^2 y^2 - 2Cx,$$

откъдето след полагане $k = 1/C$ получаваме $y = \sqrt{2kx + k^2}$ при $x \geq -k/2$, което показва, че фокусното разстояние е $k/2$. Да отбележим, че сечението на огледалото $y^2 = 2kx + k^2$ с правата $x = 0$ има дължина $2k$, която е 4 пъти по-голяма от фокусното разстояние. ■

1.5. Тотални диференциални уравнения Интегриращ множител

1.5.1. Тотални диференциални уравнения

Нека Ω е област в равнината $\mathbf{R}^2$, $M(x, y)$ и $N(x, y)$ са функции от клас $C^1(\Omega)$. Диференциалното уравнение

$$y'(x) = -\frac{M(x, y(x))}{N(x, y(x))}, \quad N(x, y) \neq 0$$

е равносилно на уравнението в диференциали

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0\,. \tag{1.16}$$

Определение 1.1. *Уравнението в диференциали (1.16) се нарича тотално диференциално уравнение в* Ω*, ако съществува функция* $U \in C^2(\Omega)$*, такава че* $dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ *, т.е.*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \tag{1.17}$$

Функцията $U \in C^2(\Omega)$, която удовлетворява системата (1.17), се нарича ***потенциал*** на уравнението (1.16). От системата (1.17) и $dU = 0$ следва, че общото решение на (1.16) има вида $U(x, y) = C$, т.е. траекториите на (1.16) са линии на ниво на функцията U, потенциала на уравнението (1.16).

Твърдение1.1*. (необходимо условие за тоталност). Нека* $M, N \in C^1(\Omega)$ *и уравнението (1.16) е тотално в* Ω. *Тогава*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Omega\,. \tag{1.18}$$

Доказателство. Нека $U \in C^2(\Omega)$ е функция, за която е в сила системата (1.17). Тогава от равенството на смесените производни за C^2 функция, следва

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad (x, y) \in \Omega \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \quad (x,y)\in\Omega . \blacksquare$$

Да припомним

Теорема за неявната функция (ТНФ). *Нека* f *е диференцируема функция в област* Ω *в равнината и* $f(x,y)=0$. *Ако* $(x_0,y_0)\in\Omega$ *е вътрешна точка,* $f(x_0,y_0)=0$ *и* $f_y(x_0,y_0)\neq 0$*, то съществува диференцируема функция* $y=y(x)$ *, която е определена в околност* $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ *и*

$$y'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}, \quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

Твърдение 1.2. *(достатъчно условие за тоталност). Нека* $M,N\in C^1(\Omega)$*,* ($M(x, y)$, $N(x, y)$) $\neq$ (0, 0) *и* $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, $(x,y)\in\Omega$*. Тогава съществува* $U\in C^2(\Omega)$*, за която е в сила системата (1.17) и решенията на уравнението (1.16) са от вида* $U(x, y) = C$ *.*

Доказателство. Търсим $U\in C^2(\Omega)$, която удовлетворява системата (1.17). Интегрираме първото уравнение по x, откъдето $U(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)$. За да удовлетворим второто уравнение, диференцираме по y последното равенство и получаваме

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+C'(y)=\int\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx+C'(y)=N(x,y).$$

Тогава

$$C'(y)=N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx=\varphi(y). \qquad (1.19)$$

Функцията $N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx$ е функция само на y, т.к. съгласно условието (1.18)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx\right)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=0 .$$

От (1.19) следва, че $C(y)=\int\varphi(y)dy+C$ и тогава

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \varphi(y)dy = C.$$

Функцията U е от клас $C^2(\Omega)$, т.к. $M,N \in C^1(\Omega)$. Решенията на уравнението (1.16) в неявна форма са от вида $U(x,y) = C$. Наистина, ако $N(x,y) \neq 0$, то $U_y = N(x,y) \neq 0$ и съгласно теоремата за неявната функция (ТНФ), съществува функция $y = y(x)$, която е определена в околност на x, за която $y'(x) = -\dfrac{U_x}{U_y} = -\dfrac{M(x,y(x))}{N(x,y(x))}$, което е равносилно на (1.16). Ако $M(x,y) \neq 0$, то $U_x = M(x,y) \neq 0$ и съгласно ТНФ, съществува функция $x = x(y)$, определена в околност на y за която $x'(y) = -\dfrac{U_y}{U_x} = -\dfrac{N(x(y),y)}{M(x(y),y)}$, което е равносилно на (1.16). ■

Пример 1.6. *Намерете общото решение на уравнението*

$$(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)dy = 0.$$

Решение. За функциите $M = 3x^2y + 8xy^2$, $N = x^3 + 8x^2y + 12y^2$ имаме $M_y = N_x = 3x^2 + 16xy$. Търсим функцията *U*, за която

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2y + 8xy^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + 8x^2y + 12y^2.$$

С интегриране по *x* намираме

$$U(x,y) = \int (3x^2y + 8xy^2)dx + C(y) = x^3y + 4x^2y^2 + C(y).$$

Тогава

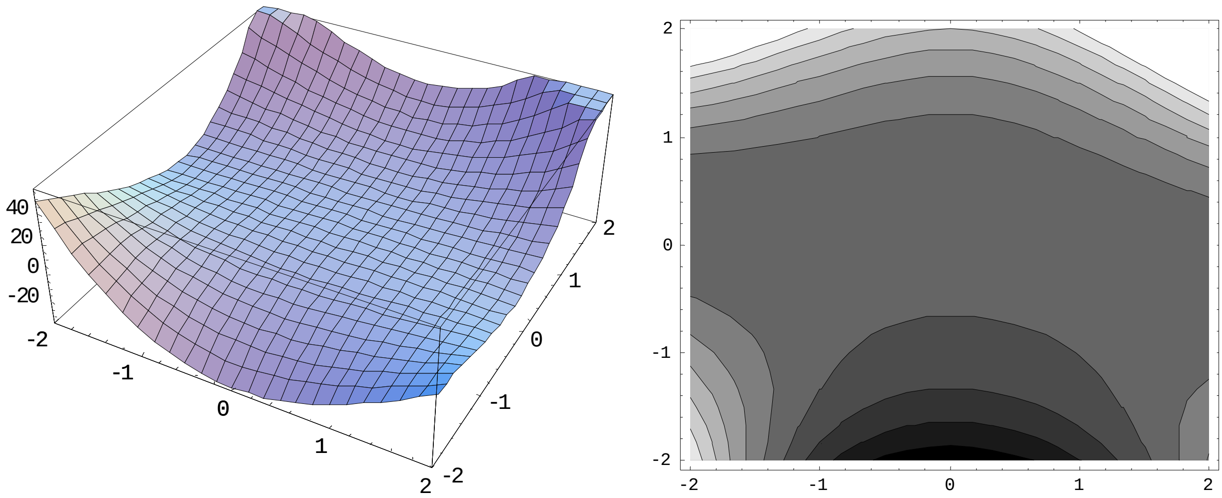
$$U_y = x^3 + 8x^2y + C'(y) = x^3 + 8x^2y + 12y^2,$$

откъдето $C'(y) = 12y^2$, $C(y) = 12\int y^2 dy + C = 4y^3$. Общото решение на уравнението е

$$x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = C.$$

На Фиг.1.7 са дадени графиката на функцията $z = x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3$ и линиите ѝ на ниво с програмата на *Mathematica*:

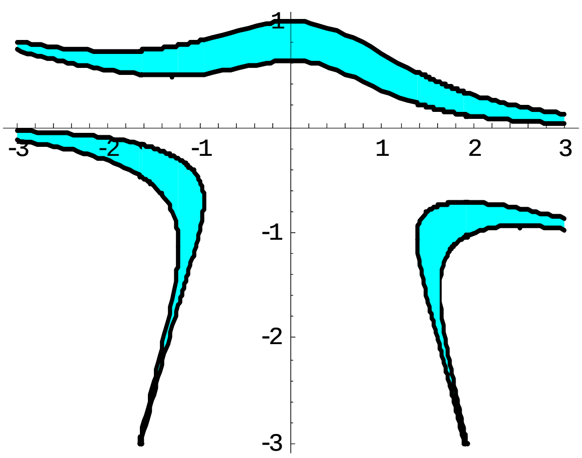
```
f[ x_, y_ ] = x^3 y + 4x^2 y^2 + 4y^3
Plot3D[ f[x,y], {x,–2,2}, {y,–2,2}, Shading → False ]
ContourPlot[ f[x,y], {x,–2,2}, {y,–2,2} ]
```



Фиг. 1.7. Графика и линии на ниво на $z = x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3$, $(x, y) \in [-2,2] \times [-2,2]$.

На фиг.1.8 е начертана областта $1 \le x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 \le 4$ с използване на пакета за графични неравенства.

```
<< Graphics`InequalityGraphics`
InequalityPlot[ 1 ≤ x^3 y + 4x^2 y^2 + 4y^3 ≤ 4, {x,–3,3}, {y,–3,3},
PlotStyle → Thickness[ 0.007] ]
```



Фиг.1.8. Област $1 \le x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 \le 4$.

1.5.2. Интегриращ множител

Нека уравнението $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ не е тотално, т.е. не е изпълнено условието $M_y = N_x$ в Ω.

Функцията $\mu = \mu(x, y) \neq 0$ в Ω се нарича ***интегриращ множител*** за уравнението (1.16), ако равносилното на (1.16) уравнение

$$\mu(x, y)\, M(x, y)dx + \mu(x, y)\, N(x, y)dy = 0$$

е тотално, т.е.

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \quad \Leftrightarrow \quad \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x . \tag{1.20}$$

Ще разгледаме два вида интегриращи множители: когато μ е функция само на x, и когато μ е функция само на y.

Случай 1. $\mu = \mu(x)$. Уравнението (1.20) се преобразува в

$$\mu'(x) = \frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)}\mu(x).$$

Ако $\left(M_y(x,y) - N_x(x,y)\right)/ N(x,y) = \varphi(x)$, то съществува интегриращ множител $\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$.

Случай 2. $\mu = \mu(y)$. Уравнението (1.20) в този случай е

$$\mu'(y) = \frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)}\mu(y).$$

Ако $\left(N_x(x,y) - M_y(x,y)\right)/ M(x,y) = \psi(y)$, то съществува интегриращ множител $\mu(y) = e^{\int \psi(y)dy}$.

Забележка. Ако M и N са от класа $C^2(\Omega)$, то Случай 1 е изпълнен, ако

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(M_{yy} - N_{xy}\right)N = \left(M_y - N_x\right)N_y$$

$$\Leftrightarrow \quad M_{yy}N + N_x N_y = NN_{xy} + M_y N_y .$$

Аналогично, в сила е Случай 2, ако $N_{xx}M + M_x M_y = MM_{xy} + N_x M_x$.

Пример 1.7. *Намерете общото решение на ДУ* $\left(x^2+y\right)dx - xdy = 0$.

Решение. Уравнението не е тотално, но

$$\left(M_y - N_x\right)/N = \left(1-(-1)\right)/(-x) = -2/x = \varphi(x)$$

и съществува интегриращ множител

$$\mu(x) = \exp(-\int(2/x)dx) = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = 1/x^2, \quad x>0.$$

За $x>0$ уравнението е равносилно на $\left(1+y/x^2\right)dx - (1/x)dy = 0$, което е тотално ДУ. Търсим функция *U*, за която $U_x = 1+y/x^2$, $U_y = -1/x$. От второто уравнение, с интегриране по *y*, получаваме

$$U(x,y) = -\int \frac{1}{x}dy + C(x) = -\frac{y}{x} + C(x),$$

$$U_x(x,y) = \frac{y}{x^2} + C'(x) = 1 + \frac{y}{x^2} \quad \Leftrightarrow \ C'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = x + C$$

$$U(x,y) = -\frac{y}{x} + x = C \quad \Leftrightarrow -y + x^2 = Cx \quad \Leftrightarrow y = x^2 - Cx. \ \blacksquare$$

Пример 1.8. *Намерете общото решение на системата на Лотка-Волтера (модел хищник –-жертва)*

$$\left|\begin{array}{l}\dot{x} = (a-by)x,\\ \dot{y} = (-c+dx)y,\end{array}\right. \tag{1.21}$$

за която $x>0,\ y>0$ и a, b, c, d са положителни константи.

Решение. Да отбележим, че системата има стационарно решение, което се получава при

$$\left|\begin{array}{l}(a-by)x = 0,\\ (-c+dx)y = 0,\end{array}\right.$$

и при $x>0,\ y>0$, то е $x_0 = c/d, \quad y_0 = a/b.$

При $a-by \neq 0$ ДУ е равносилно на диференциалното уравнение с разделени променливи

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{(-c+dx)y}{(a-by)x}, \quad a-by\neq 0,$$

което е еквивалентно на уравнението в диференциална форма

$$(-c+dx)y\,dx-(a-by)x\,dy=0. \tag{1.22}$$

При $-c+dx\neq 0$ системата (1.21) е отново равносилна на (1.22).

Последното уравнение има интегриращ множител $\mu(x,y)=1/(xy)$. За $x>0, \quad y>0$ (1.22) е равносилно на $(-c/x+d)dx-(a/y-b)dy=0$, което е уравнение с разделени променливи, а също и тотално уравнение. След интегриране получаваме $-c\ln x+dx-a\ln y+by=K$ или

$$U(x,y)=dx+by-c\ln x-a\ln y=K.$$

Функцията U има единствена критична точка, която удовлетворява системата

$$\left|\begin{array}{l} U_x=d-c/x=0 \quad \Rightarrow \quad x_0=c/d \\ U_y=b-a/y=0 \quad \Rightarrow \quad y_0=a/b \end{array}\right. .$$

Тъй като $A=U_{xx}=c/x^2,\ B=U_{xy}=0,\ C=U_{yy}=a/y^2$, за $x>0, \quad y>0$ имаме

$$\left(AC-B^2\right)(x_0,y_0)>0, \quad A(x_0,y_0)>0,$$

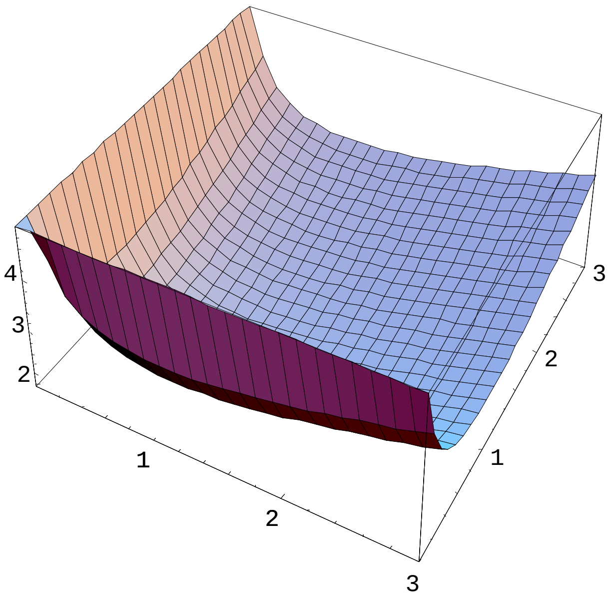
следователно (x_0, y_0) е точка на глобален минимум за функцията U и тя е изпъкнала функция. Ако $K>0$, то

$$K=dx+by-c\ln x-a\ln y\geq k(x-\ln x+y-\ln y),$$

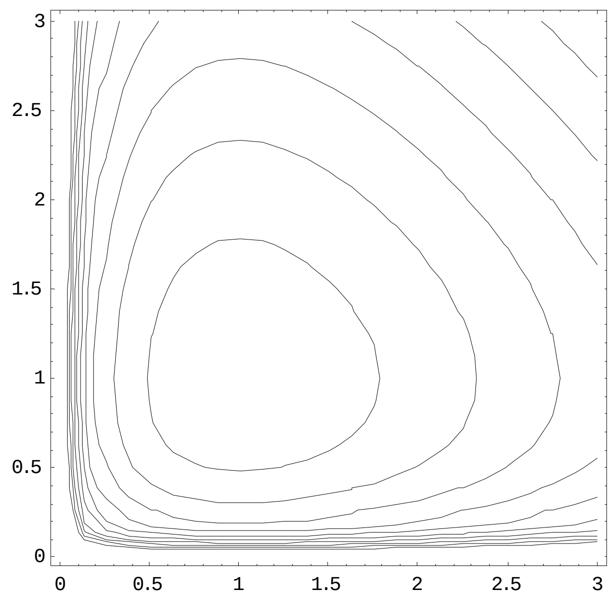
където $k=\min(\min(b,d),\max(a,c))$. Тъй като $x-\ln x>0,\ x>0$, то $K/k>x-\ln x>0$, $K/k>y-\ln y>0$, откъдето следва, че x и y са ограничени. Тогава линиите на ниво $U(x, y) = K$ са ограничени затворени криви, които съдържат във вътрешността си точката $(c/d,a/b)$.

При $a=b=c=d=1$ на Фиг.1.9 и Фиг.1.10 са начертани графиката на функцията $z=x+y-\ln x-\ln y$ и линиите ѝ на ниво с програмата на *Mathematica*:

$$f[\ x\_, y\_\ ] = x + y - Ln[x] - Ln[y]$$
$$Plot3D[\ f[x,y], \{x,0,3\}, \{y,0,3\}\ ]$$
$$ContourPlot[\ f[x,y],\ \{x,0,3\},\ \{y,0,3\}, ContourShading \to False\ ]$$



Фиг.1.9. Графика на функцията $z = x + y - \ln x - \ln y$, $(x, y) \in (0,3] \times (0,3]$.



Фиг.1.10. Интегрални криви на системата на Лотка-Волтера при $a = b = c = d = 1$ в квадрата $(0,3] \times (0,3]$.

ГЛАВА 2

Теореми за съществуване и единственост на решения на задача на Коши за ОДУ от I ред в нормална форма

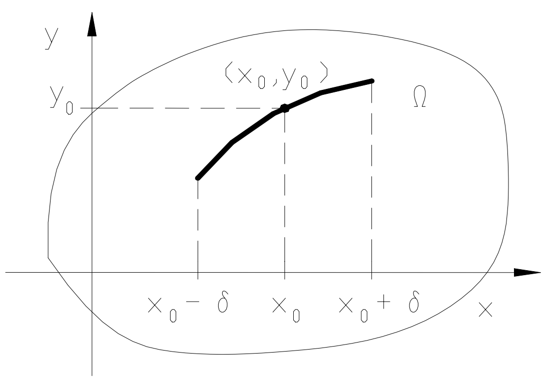
2.1. Теорема за съществуване на решения

Нека Ω е област в $\mathbf{R}^2$, $f \in C(\Omega)$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ е вътрешна точка. Разглеждаме задачата на Коши

$$(C): \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

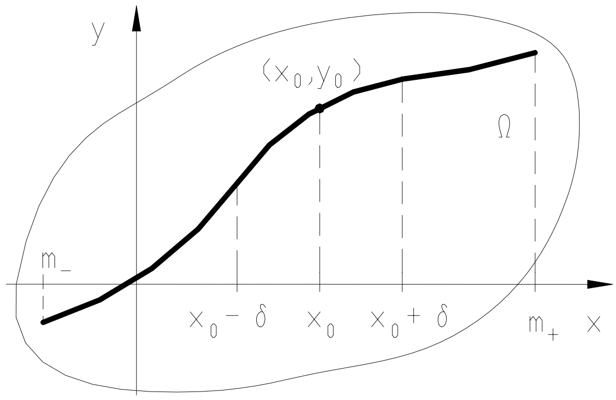
Функцията $y = y(x)$ е решение на (C) в интервала I, ако $x_0 \in I$, $y(x_0) = y_0$ и $y(x)$ удовлетворява $y'(x) = f(x, y(x))$, $\forall x \in I$.

Теорема 2.1. (*Теорема за съществуване и единственост (ТСЕ)*)**.** *Нека Ω е отворено подмножество на $\mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f \in C(\Omega)$ и $f_y \in C(\Omega)$. Тогава съществува $\delta > 0$, така че задачата (C) има решение $y \in C^1(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и то е единствено.*



Фиг. 2.1. Локално решение на задача на Коши

От ТСЕ следва, че решението $y = y(x)$ на (C) може да се продължи до максимален интервал (m_-, m_+), така че $y \in C^1(m_-, m_+)$ и точката (x, $y(x)$) клони към точка от границата на Ω при $x \to m_-$ или $x \to m_+$, ако $-\infty < m_\pm < +\infty$. Интервалът (m_-, m_+) е ***максимален интервал на съществуване*** на решението $y = y(x)$ на (C).



Фиг. 2.2. Максимален интервал на съществуване на решение.

Доказателството на ТСЕ се основава на ***метод на Пикар на последователните приближения.*** Да отбележим, че $y(x)$ е решение на (C), тогава и само тогава, когато $y(x)$ е решение на интегралното уравнение

$$\text{(E):} \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in I.$$

За доказването на ТСЕ се използва редицата от последователни приближения на Пикар

$$y_0(x) = y_0, \ldots, y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \ldots \tag{2.1}$$

и се показва, че тя е равномерно сходяща в околност $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ на x_0.

Ще припомним някои сведения от теорията на сходящите редици и редове от функции.

Нека $I = [a,b]$ е ограничен и затворен интервал и $u_n(x): I \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ е редица от функции. Редицата $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ или накратко $(u_n)_n$ е ***поточково сходяща*** към функцията u в I, ако

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon, x),\ n > N \ \Rightarrow\ |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon \ .$$

Редицата от функции $(u_n)_n$ е ***равномерно сходяща*** към u в I, ако

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ n > N \ \Rightarrow\ |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon, \forall x \in I \ .$$

Редицата $(u_n)_n$ е ***сходяща*** към u ***в*** $\boldsymbol{L^2(I)}$, ако

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ n > N \ \Rightarrow \int_a^b |u_n(x) - u(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

Равномерната сходимост е по-силна от точковата и L^2 – сходимостта, т.е., ако редицата $(u_n)_n$ е равномерно сходяща към u, то $(u_n)_n$ е поточково и L^2 – сходяща към u. Обратното не е вярно (дайте примери!) В сила са следните теореми:

Теорема 2.2. *Нека $u_n \in C(I)$ и редицата $(u_n)_n$ клони към функцията u равномерно в I. Тогава $u \in C(I)$.*

Теорема 2.3. *Нека u_n е интегрируема в I и редицата $(u_n)_n$ клони равномерно към u в I. Тогава u е интегрируема функция в I и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b u(x) dx \,.$$

Наред с редиците от функции могат да се разглеждат и редове от функции. Редът $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ се нарича ***поточково, равномерно, L^2 -сходящ*** към $S(x)$ в I, ако редицата от частични суми $S_1(x) = u_1(x),\ \ldots,\ S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$, ... е точково, равномерно, L^2 – сходяща към $S(x)$ в I.

Теорема 2.4. ***(Критерий на Вайерщрас)***. *Нека съществуват константи c_n, $n \in \mathbf{N}$, така че $|u_n(x)| \le c_n$, $\forall n$, $\forall x \in I$ и редът $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ е сходящ. Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в интервала I.*

Теорема 2.5. (***теорема за почленно интегриране***). *Нека функцията $u_n(x)$ е интегрируема в интервала I, редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в I и сумата му е u(x). Тогава*

$$\int_a^b u(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \,.$$

Теорема 2.6. (***теорема за почленно диференциране***). *Нека* $u_n \in C^1(I)$, *редът* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *е равномерно сходящ в* I, *а редът* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *е поточково сходящ към* $u(x)$. *Тогава* $u \in C^1(I)$ *и* $u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, $\forall x \in I$.

Пример 2.1. Покажете, че редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

са равномерно сходящи и

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \forall x \in I.$$

Решение. От $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \le \frac{1}{n^3}$, $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}$ и критерия на Вайерщрас следва, че редовете са равномерно сходящи. Тогава, от Теорема 2.6 имаме $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $\forall x \in I$.

2.2. Локална теорема за съществуване на решение на задача на Коши

Теорема 2.7. (*Локална теорема за съществуване*). *Нека* $R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $f \in C(R)$ *е функция, за която* $f_y \in C(R)$ *и* $M := \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$, $\alpha := \min(a, b/M)$. *Тогава задачата на Коши*

$$(C): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

притежава решение $y \in C^1[x_0, x_0 + \alpha]$, *което е равномерна граница на редицата от функции* $(y_n)_n$, *зададени с*

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \; n = 0, 1, \ldots \quad x \in [x_0, x_0 + \alpha]. \tag{2.2}$$

Твърдение 2.1. *Задачата* (C) *за* $x \in [a,b]$ *е еквивалентна на интегралното уравнение*

$$(E): \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in [a,b].$$

Доказателство. (C) $\Rightarrow$ (E). Интегрираме уравнението в (C) в граници от x_0 до x и получаваме $\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, т.е.

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \;\Leftrightarrow\; y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{2.3}$$

(E) $\Rightarrow$ (C). Ако положим $x = x_0$ в (E) получаваме началното условие $y(x_0) = y_0$. Тъй като $y(x)$ е диференцируема функция, то

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t, y(t)dt) = f(x, y(x)),$$

което показва, че $y(x)$ удовлетворява задачата на Коши (C). ■

Решение на уравнението (E) ще получим като равномерна граница на редицата от функции (2.2) в интервала $I := [x_0, x_0 + \alpha]$. Нека $\Delta = \{(x,y): \; x_0 \le x \le x_0 + \alpha, \; |y - y_0| \le M(x - x_0)\}$. Според определението на α следва, че $\Delta \subset R$. В сила е следното твърдение:

Лема 2.1. *Графиките на функциите* $(y_n)_n$ *при* $x \in I$ *лежат в триъгълника* Δ, *т.е.*

$$|y_n(x) - y_0| \le M(x - x_0), \quad x \in I, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

Доказателство. Ще докажем твърдението с метода на математическата индукция. При $n = 0$ неравенството (2.4) е очевидно $|y_0 - y_0| = 0 \le M(x - x_0), \quad x \in I$. Нека (2.4) е изпълнено за $n = k$. За $n = k+1$ имаме $|y_{k+1}(x) - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t))|dt \le M\int_{x_0}^{x} dt = M(x - x_0)$, т.к. от $\Gamma_{y_k} \subset \Delta \subset R$ следва $|f(t, y_k(t))| \le M, \quad t \in I$. С това твърдението е доказано. ■

Лема 2.2. *Нека в условията на теорема 2.7,* $L := \max\limits_{(x,y)\in R} \left| \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right|$. *Тогава за редицата* $(y_n)_n$ *е в сила оценката*

$$| y_n(x) - y_{n-1}(x) | \le M \frac{L^{n-1}}{n!}(x - x_0)^n , \quad x \in I . \tag{2.5}$$

Доказателство. Ще докажем твърдението с метода на математическата индукция. При $n = 1$, то следва от Лема 2.1. Нека (2.5) е изпълнено при $n = k$,

$$| y_k(x) - y_{k-1}(x) | \le M \frac{L^{k-1}}{k!}(x - x_0)^k , \quad x \in I . \tag{2.6}$$

При $n = k + 1$ имаме

$$\begin{aligned} | y_{k+1}(x) - y_k(x) | &= \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))dt \right| \\ &\le \int_{x_0}^{x} | f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t) | \, dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

Съгласно теоремата на Лагранж,

$$A := f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t)),$$

където $(t, \xi(t)) \in \Delta$ според Лема 2.1. Тогава от (2.6) и (2.7) имаме

$$\begin{aligned} | y_{k+1}(x) - y_k(x) | &\le LM \frac{L^{k-1}}{k!} \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^k = M \frac{L^k}{k!} \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} \\ &= M \frac{L^k}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}, \end{aligned}$$

което трябваше да докажем. ■

Лема 2.3. *Редицата от функции* $(y_n)_n$ *, зададена с (2.2) е равномерно сходяща към функция* $y \in C(I)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in I. \tag{2.8}$$

Доказателство. Тъй като $y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1})$, то y_n е $n+1$ частична сума на функционалния ред

$$y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \cdots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \cdots \tag{2.9}$$

Ще докажем, че редът (2.9) е равномерно сходящ при $x \in I$. Съгласно Лема 2.2

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le M \frac{L^{n-1}}{n!}(x - x_0)^n \le M \frac{L^{n-1}}{n!}\alpha^n .$$

Числовият ред $\sum_{n=1}^{\infty} ML^{n-1}\alpha^n / n!$ е сходящ и сумата му е $M(e^{\alpha L} - 1)/L$. Съгласно критерия на Вайерщрас, редът (2.9) е равномерно сходящ и сумата му $y(x)$ е равномерна граница на непрекъснатите функции $y_n(x)$, $x \in I$. Съгласно Теорема 2.2, функцията $y(x)$ е непрекъсната в I.

Остава да покажем, че е в сила равенство (2.8). Имаме

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y(t)| &\le |y_{n+1}(x) - y_n(x)| + |y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| + \cdots \\ &\le M \frac{L^n}{(n+1)!}\alpha^{n+1} + M \frac{L^{n+1}}{(n+2)!}\alpha^{n+2} + \cdots \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} B_n &:= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \\ &\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))| dt = \int_{x_0}^{x} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi_2(t)) \right| |y_n(t) - y(t)| dt \\ &\le \alpha L \left(M \frac{L^n}{(n+1)!}\alpha^{n+1} + M \frac{L^{n+1}}{(n+2)!}\alpha^{n+2} + \cdots \right) \\ &\le M\alpha \left(\frac{(\alpha L)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(\alpha L)^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots \right). \end{aligned}$$

Нека $\varepsilon > 0$. Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha L)^n / n! = e^{\alpha L} - 1$ е сходящ, то съществува $N = N(\varepsilon) > 0$, така че при $n > N$ за остатъка R_n имаме

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{M\alpha}.$$

Тогава $B_n < \varepsilon$ и така $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, с което твърдението е доказано.■

Доказателство на Теорема 2.7. Извършваме граничен преход при $n \to \infty$ в равенството

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \quad x \in [x_0, x_0 + \alpha] = I.$$

Съгласно Лема 2.3 имаме

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \quad x \in I,$$

т.е. функцията $y(x)$ удовлетворява интегралното уравнение (E), което съгласно Твърдение 2.1, е равносилно на задачата на Коши (C). ■

2.3. Теорема за единственост на решенията на задачата на Коши

Разглеждаме задачата на Коши

$$(C): \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

В сила е следната

Теорема 2.8. (*теорема за единственост*) *Нека* $f \in C(R)$ *и* $f_y \in C(R)$, *където* $R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. *Ако* y_1 *и* y_2 *са две решения на задачата на Коши* (C) *в интервала* $I = [x_0, x_0 + a]$, *то* $y_1(x) = y_2(x)$ *за всяко* $x \in I$.

Лема 2.4. *Нека* $u \in C(I)$, $u \geq 0$ *в* I, $L > 0$ *и е изпълнено неравенството* $u(x) \leq L\int_{x_0}^{x} u(t)dt$, $x \in I$. *Тогава* $u(x) \equiv 0$ *в* I.

Доказателство. Нека $v(x) = \int_{x_0}^{x} u(t)dt \geq 0$. Тогава от условието следва, че $v'(x) \leq Lv(x)$ и $v(x_0) = 0$. Нека $q(x) = v'(x) - Lv(x)$. Съгласно формулата за решение на линейно ДУ от първи ред имаме

$$v(x) = e^{L(x-x_0)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{-L(t-x_0)}dt\right) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{L(x-t)}dt \leq 0, \quad x \in I.$$

Тогава $v(x) \equiv 0$ *в* I, откъдето и $u(x) \equiv 0$ *в* I.■

Доказателство на теорема 2.8. Тъй като $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са решения на (C), съгласно Твърдение 2.1 от предния параграф имаме

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt \quad \text{и} \quad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt.$$

След почленно извеждане на тези уравнения получаваме

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))dt. \tag{2.10}$$

Съгласно теоремата на Лагранж,

$$f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))dt = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi(t))(y_1(t) - y_2(t)), \tag{2.11}$$

където $(t, \xi(t)) \in R$. Тъй като по условие $f_y \in C(R)$, съществува $L = \max\limits_{(x,y)\in R} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right|$. От (2.10) и (2.11) следва, че

$$|\, y_1(x) - y_2(x)| \leq L\int_{x_0}^{x} |\, y_1(t) - y_2(t)|\, dt.$$

Нека $u(x) = |\, y_1(x) - y_2(x)|$. Съгласно Лема 2.4 следва, че $u(x) = 0$ в I, т.е. $y_1(x) = y_2(x)$ за всяко $x \in I$.■

В сила е по-силна теорема за единственост, известна като

Теорема 2.9. *(Теорема на Осгуд). Нека f е дефинирана в правоъгълника R и удовлетворява условието*

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \le \Phi(|y_2-y_1|),$$

където $\Phi \in C(0,+\infty)$ е положителна функция. Ако интегралът $\int_0^1 \frac{dt}{\Phi(t)}$ е разходящ, то задачата (C) *има най-много едно решение.*

Доказателство. Нека y_1 и y_2 са две решения на (C) с дефиниционни интервали I_1 и I_2 . Ще докажем, че $y_1(x) = y_2(x)$ за $x \in I_1 \cap I_2 =: I$.

Нека съществува $\bar{x} \in I$, така че $y_1(\bar{x}) \neq y_2(\bar{x})$. Да предположим, че $\bar{x} > x_0$ и $y_1(\bar{x}) > y_2(\bar{x})$. Останалите случаи се разглеждат аналогично.

Нека $\alpha \in (x_0, \bar{x})$ е най-близката до $\bar{x}$ нула на функцията $r(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Тогава $r(x) > 0$ за $x \in (\alpha, \bar{x}]$. За $x \in [\alpha, \bar{x}]$ имаме

$$\begin{aligned} y_1'(x) - y_2'(x) &\le |y_1'(x) - y_2'(x)| \\ &= |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \\ &\le \Phi(|y_1(x) - y_2(x)|) = \Phi(y_1(x) - y_2(x)). \end{aligned}$$

Тогава $r'(x) \le \Phi(r(x))$ и следователно $r'(x)/\Phi(r(x)) \le 1$ при $x \in (\alpha, \bar{x}]$.

Нека $\varepsilon > 0$ е такова че $\alpha + \varepsilon < \bar{x}$. Интегрираме последното неравенство в граници от $\alpha + \varepsilon$ до $\bar{x}$ и получаваме

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{\bar{x}} \frac{r'(x)dx}{\Phi(r(x))} = \int_{r(\alpha+\varepsilon)}^{r(\bar{x})} \frac{dt}{\Phi(t)} \le \bar{x} - \alpha - \varepsilon < \bar{x} - \alpha .$$

При $\varepsilon \to 0$, от непрекъснатостта на $r(x)$, получаваме $\int_0^{r(\bar{x})} (1/\Phi(t))dt < \bar{x} - \alpha$, което противоречи на разходимостта на $\int_0^1 (1/\Phi(t))dt$. Така допускането, че съществува $\bar{x} \in I$, така че $y_1(\bar{x}) \neq y_2(\bar{x})$, не е вярно и следователно за всяко $x \in I$ е изпълнено $y_1(x) = y_2(x)$. ■